数理解析研究所講究録
289巻 1977年 34-44

Flowによるgeneralized analytic functionsよりなる環の分類

神奈川大 工 泉池敬司

unit circle 上の disk algebra 及び real line の Bohr コンパクト化上の generalized analytic functions のなす algebra の拡張として Forelli [1] により, flow による generalized analytic functions のなす algebra が導入された。以後 Muhly による一連の仕事 [5]—[8] と Forelli [2] などでその algebra が研究されてきた。和田 [11], 富山 [9] [10] にその紹介及び応用などが詳しく報告されている。ここでは function algebra の観点より generalized analytic functions よりなる algebra を flow により分類したい。

§1. Normalized flow.

X を compact Hausdorff space とし, (R, X) を flow とする。すなわち R から X 上の homeomorphisms への group homo. $t \longrightarrow T_t$ が与えられていて $R \times X \ni (t, p) \longrightarrow T_t p$ が連続の時にい

う。$H^\infty(R)$でR上で連続で上半平面にanalyticに拡張出来る関数の集合とする。$\varphi\in C(X)$を任意の$x\in X$のT_tによるorbit $O(x)$上に制限したら$H^\infty(R)$に属している時，analytic functionと呼び，その集合を$\mathfrak{A}_X$とかく。すなわち

$$\mathfrak{A}_X = \{\varphi\in C(X);\ \varphi\circ T_t x \in H^\infty(R)\quad {}^\forall x\in X\}.$$

容易に$\mathfrak{A}_X$はsup norm closedな$C(X)$のsubalgebraであることがわかる。しかし一般にはXの点をseparateするとは限らない。$\mathfrak{A}_X$の他の表現方法にspectrumを用いるものがある。$\varphi\in C(X)$, $f\in L^1(R)$に対して$\varphi * f \equiv \int_{-\infty}^{\infty} T_t\varphi f(t)\,dt$とおく，ここで$T_t\varphi(x)\equiv\varphi(T_t x)$である。$J(\varphi)\equiv\{f\in L^1(R);\ \varphi*f=0\}$は$L^1(R)$のclosed idealになりそのFourier変換の共通zero点の集合を$sp(\varphi)$とかく。すると

補題1（[5], p.114）. $\mathfrak{A}_X = \{\varphi\in C(X);\ sp(\varphi)\subset[0,\infty)\}$.

よく使う補題として次をあげておく。

補題2（[5], p.116）. X上のBaire measure μが$\mathfrak{A}_X$のrepresenting measure, $\mu\neq\delta_x$ (${}^\forall x\in X$)

$\Rightarrow$ μはquasi-invariant，すなわち${}^\forall t\in R$に対して$T_t\mu \ll \mu$である。ここで$T_t\mu(E)\equiv\mu(T_tE)$; E: Baire set of X.

補題3（[8], p.57）. $\mu\in M(X)$がrealで$\int f\,d\mu=0$ ${}^\forall f\in\mathfrak{A}_X$ $(\mu\perp\mathfrak{A}_X)$ $\Rightarrow$ μはT_t-invariant.

さて$\mathfrak{A}_X$を扱いたいわけであるが，一般には$\mathfrak{A}_X$はXをseparateしていない。そこで$x, y \in X$, $f(x)=f(y)$ $\forall f \in \mathfrak{A}_X$としてみる。すると$\delta_x - \delta_y \perp \mathfrak{A}_X$であり補題3より$\delta_x - \delta_y$は$T_t$-invariantになる。よって$T_t x = x$, $T_t y = y$ $\forall t \in R$である。

今後この様なfixed pointが重要な役割をするので$\mathfrak{L} \equiv \{x \in X ; T_t x = x \ \forall t \in R\}$とおく。上の議論より$\mathfrak{L}$が2点以上を含まないならば$\mathfrak{A}_X$は$X$上のfunction algebraとなる。それ以外の時は$\mathfrak{A}_X$をfunction algebraとみるために(R, X)のnormalizationを考える。

$X \ni x, y$に対して$f(x)=f(y)$ $\forall f \in \mathfrak{A}_X$の時$x \sim y$とかく。商空間$\hat{X} = X/\sim$は$T_t \hat{x} \equiv \widetilde{T_t x}$により$(R, X)$から自然に一つのflowがinduceされる。これを$(R, \hat{X})$とかき，(R, X)のnormalizationということにする。すると$\mathfrak{A}_{\hat{X}} \cong \mathfrak{A}_X$であり$\mathfrak{A}_{\hat{X}}$は$\hat{X}$の点をseparateしていて$\hat{X}$上のfunction algebraとなる。

よって今後は(R, X)はnormalizedされたものとし，$\mathfrak{A}_X$はX上のfunction algebraと考える。

次に$\mathfrak{A}_X$のmaximal ideal space X_1に一つのflowを導入する。$p \in X_1$に対してそのX上のrepresenting measureをm_pとする。$f, g \in \mathfrak{A}_X$に対して$\int fg \, dT_t m_p = \int f \, dT_t m_p \int g \, dT_t m_p$であることより$T_t m_p$もまたある点$T_t p \in X_1$をrepresentする。この$\{T_t\}$はwell-definedであり，これにより$X_1$にflowが

入ることが確かめられる。

命題1. $\widehat{\mathfrak{A}}_X \subset \mathfrak{A}_{X_1}$.

証明. $p \in X_1$, $f \in \mathfrak{A}_X$ に対して $\hat{f}(T_t p) \in H^\infty(R)$ をいえばよい。
$F(t) \equiv \int f\, d\, T_t m_p = \hat{f}(T_t p) = \int T_{-t} f\, dm_p$, $G(t) \equiv F(-t)$ とおく。
すると $sp(G) \subset -sp(f) \wedge sp(m_p) \subset (-\infty, 0]$ よって
$sp(F) \subset [0, \infty)$ ゆえに $F \in H^\infty(R)$.

注) 上の命題より (R, X_1) は normalized flow であり
$\mathfrak{A}_{X_1}|_X = \mathfrak{A}_X$.

定理1. 次は同値.

1) $\mathfrak{A}_X = C(X)$ 2) $X = P$.

3) $X_1 = X$ 4) $\widehat{\mathfrak{A}}_X = \mathfrak{A}_{X_1}$.

証明 2) ⇒ 1) ⇒ 3) ⟺ 4) はだいたい明らか.
3) ⇒ 2)、$X \neq P$ とする。$x \in X \setminus P$ とする。$\delta_x * P_{iy}$ $(y > 0)$ は
$\mathfrak{A}_X$ の rep. meas. である。ただし $P_{iy}(t) = y/\pi(y^2+t^2)$.
もし $z \in X$ の点を表現すれば補題3より $\delta_z - \delta_x * P_{iy}$ は
invariant measure である。しかし $z \in P$ でもないし, $z \in X \setminus P$

でもない。矛盾。よって $\delta_x * P_{iy}$ は X の点以外を表現する。
ゆえに $X_1 \supsetneqq X$.

注) 証明より μ が $x \in X \setminus P$ の rep. meas. ならば $\mu = \delta_x$ でありよって $X \setminus P$ の点は Choquet bdary point である。

命題 2. $\mathfrak{A}_X$ の Shilov bdary は X.

命題 3. $x \in X$, x の n.b.d. $U(x)$ in X_1 が $U(x) \subset X$ になるものがある $\Longrightarrow$ $x \in P$

§2. $\mathfrak{A}_X$ の flow による分類.

$\mathfrak{A}_X$ がそれぞれ essential, antisymmetric, analytic, integral domain, pervasive, maximal になる必要十分条件を flow に与えたい。

定義: Y 上の function algebra A について
1) essential $\Longleftrightarrow$ 最小の essential set が Y と一致, ここで $E \subset Y$ が essential set for A とは, もし $f \in C(Y)$ $f = 0$ on E ならば $f \in A$ の時にいう。

2) antisymmetric $\Leftrightarrow$ Y が antisymmetric set になっている,

ここで $E \subset Y$ が antisymmetric とは, もし $f \in A$ で

かつ $f|_E$ real ならば $f|_E$ は constant のとき.

3) integral domain $\Leftrightarrow$ 代数的な意味そのまま.

4) analytic $\Leftrightarrow$ $f \in A$ がある Y の open set 上で 0 ならば $f = 0$.

5) pervasive $\Leftrightarrow$ 任意の closed subset $E \subsetneqq Y$ に対して

$A|_E$ は $C(E)$ で norm dense.

6) maximal $\Leftrightarrow$ $A \subsetneqq B \subsetneqq C(Y)$ なる algebra B がない.

一般論より次の関係は良く知られている。

pervasive $\Rightarrow$ analytic $\Rightarrow$ integral domain

$\Rightarrow$ antisymmetric $\Rightarrow$ essential

又 maximal の条件の下で考えると上の事はすべて同値である。

定理 2. $H \equiv \overline{X \setminus P}$ が $\mathfrak{A}_X$ の最小の essential set である.

よって　　$\mathfrak{A}_X$: essential $\Leftrightarrow$ P の内実なし.

証明. H は一つの essential set であることは明らか。

$E \subsetneqq H$ closed とする。$x \in H \setminus E$, $x \notin P$ なるものがある。

$I = [-\varepsilon, \varepsilon]$ で $\{T_t x ; t \in I\} \cap E = \phi$ なる $\varepsilon > 0$ がある。又

${}^{\exists} g \in C(X)$ で $g = 0$ on E かつ $g|_{\{T_t x\,;\, t \in I\}} \neq h|_{\{T_t x\,;\, t \in I\}}$ ${}^{\forall} h \in \mathfrak{A}_X$.

なぜなら $\{T_t x\,;\ t\in I\}$ は $\mathfrak{A}_X$ の interpolation set でないから。
よって E は essential set でない。∴ H が最小の essential set.

定理 3. $\mathfrak{A}_X$: antisymmetric $\Longleftrightarrow$ $\varphi\in C(X)$, $sp(\varphi)=\{0\}$ ならば φ は constant.

注) maximal antisymmetric set を flow の言葉ではきちんとはいいにくいが, $x\in X$ を含む max. antisymmetric set はまず一段階として $\overline{O(x)}$ を考える。次に $\overline{O(y)}\cap\overline{O(x)}\neq\phi$ なるものに対して $\overline{O(x)\cup\bigcup_y O(y)}$ を考える。その次に $\overline{O(x)\cup\bigcup_y O(y)}\cap\overline{O(z)}\neq\phi$ なる $z\in X$ に対して $\overline{O(x)\cup(\bigcup_y O(y))\cup(\bigcup_z O(z))}$ を考える。以下つづけて, 切れ目で得られるものが求めるものである。それが X と一致すれば $\mathfrak{A}_X$ は antisymmetric である。

定理 4. 次は同値.

1). $\mathfrak{A}_X$: analytic　　2) $\mathfrak{A}_X$: integral domain

3) T_t-invariant open set は X で dense.

証明. 1) $\Rightarrow$ 2) は明らか.

2) $\Rightarrow$ 3). Q を T_t-invariant open subset of X で X で dense でないものとする。$Q_1=X\setminus\overline{Q}$ も又 T_t-inv. open

subset である。ここで $f\in C_0(Q_1)$, $g\in C_0(Q)$ を

$$\varphi_1(x)=\begin{cases} f(x) & x\in Q_1 \\ 0 & x\in X\setminus Q_1 \end{cases} \qquad \varphi_2(x)=\begin{cases} g(x) & x\in Q \\ 0 & x\in X\setminus Q \end{cases}$$

が $\mathfrak{A}_X$ に入り $\varphi_1\neq 0$, $\varphi_2\neq 0$ になる様にとれる。$\varphi_1\varphi_2=0$ である。

3) ⇒ 1)、$f\in\mathfrak{A}_X$ で $f=0$ on open set Q とする。すると $f=0$ on $\bigcup_{t\in R} T_tQ$ である。$\bigcup_{t\in R} T_tQ$ は X で dense。よって $f=0$.

定理 5. $\mathfrak{A}_X$: pervasive

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{A}_X|_P \text{ は dense in } C(P) \\ \text{proper } T_t\text{-invariant open set は } X\setminus P \text{ を含む.} \end{cases}$

証明. ⇒ $F\subsetneqq X$, $F\not\subset P$ なる closed F があるとする。(R,F) は一つの flow になる。$\mathfrak{A}_X|_F\subset\mathfrak{A}_F$, $F\not\subset P$ より定理1から $\mathfrak{A}_F\subsetneqq C(F)$ である。よって $\mathfrak{A}_X|_F$ は $C(F)$ で dense でない。

⇐ $\mathfrak{A}_X$ を pervasive でないとする。すると $\overline{\mathfrak{A}_X|_F}\neq C(F)$ なる closed $F\subsetneqq X$ がある。$\mu\in M(F)$, $\mu\neq 0$ $\mu\perp\mathfrak{A}_X$ とする. すると μ は Forelli [1] より quasi-invariant であり, $G=\bigcup_{t\in R} T_tF^c$ は μ-measure zero, open set. 条件より $G^c\subset P$ であり $\mu\in M(P)$ となる。しかし $\mathfrak{A}_X|_P$ は $C(P)$ で dense だから $\mu=0$. よって矛盾。

定理6. $\mathfrak{A}_X$: maximal

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{A}_X|_P \text{ は } C(P) \text{ で dense} \\ \text{任意の } x\in X\setminus P \text{ に対して } O(x) \text{ は } X\setminus P \text{ で dense} \end{cases}$$

証明. $\Leftarrow$ 証明は Forelli [2] をそのままたどればよい。ただし途中である条件をみたす $x\in X$ を選ぶ所をもう少し正確に話しを進めると実は $x\in X\setminus P$ ととれることだけをチェックすればよい。

$\Rightarrow$ Case I. $\exists x\in X\setminus P$ で $\overline{O(x)}\cup P\subsetneq X$ とする。$(R,\overline{O(x)})$ は normalized flow であるが $B\equiv\{f\in C(X);\ f|_{\overline{O(x)}}\in\mathfrak{A}_{\overline{O(x)}}\}$ とおくと, B は $C(X)$ の closed subalgebra である。
$\mathfrak{A}_{\overline{O(x)}}\neq C(\overline{O(x)})$ であるから $B\subsetneq C(X)$ である。所で $y\in X\setminus\overline{O(x)}$, $y\notin P$ なるものがあるから, $\mathfrak{A}_X\subsetneq B$ である。
Case II. $\mathfrak{A}_X|_P$ が $C(P)$ で dense でないとする。
$B'\equiv\{f\in C(X);\ f|_P\in\overline{\mathfrak{A}_X|_P}\}$ とする。$\mathfrak{A}_X\subsetneq B'\subsetneq C(X)$ である。

系1. $\mathfrak{A}_X$ の場合.

essential $\Leftarrow$ antisy. $\Leftarrow$ integral do. $\Longleftrightarrow$ analytic $\Leftarrow$ pervasive

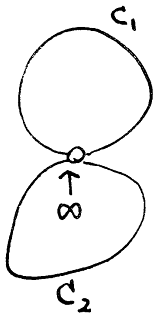
maximal

系2. $\mathrm{Int}\,P=\phi$ のとき, pervasive $\Longleftrightarrow$ maximal

例 1. $X \equiv \{z;\ |z|\le 1\}$ に回転の flow を与える。
すると $\mathfrak{A}_X$ は essential，しかし $\mathfrak{A}_X$ は antisymmetric でない。

例 2.

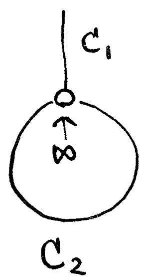
X:



$C_1 \cong C_2 \cong R$ として，R の移動の flow を与える。∞の点が fixed point. すると $\mathfrak{A}_X$ は antisymmetric しかし $\mathfrak{A}_X$ は analytic でない。

例 3.

X:



$C_2 \cong R$ として flow を考える。
C_1 はすべて fixed point とする。
すると $\mathfrak{A}_X$ は essential でない。
しかし $\mathfrak{A}_X$ は maximal である。

参考文献

1) F. Forelli, Analytic and quasi-invariant measure, Acta Math. 118 (19~~76~~67), 33-59.

2) ———, A maximal algebra, Math. Scand. 30 (1972), 152-158.

3) K. Izuchi and Y. Izuchi, Flows and function algebras of generalized analytic functions, to appear.

4) G. Leibowitz, Lectures on complex function algebras, Scott, Foresman. 1970.

5) P. Muhly, Function algebras and flows, Acta Sci. Math. (Szeged) 35 (1973), 111-121.

6) ———, 〃 II, Ark. Math. 11 (1973), 203-213.

7) ———, 〃 III, Math. Z. 136 (1974), 253-260.

8) ———, 〃 IV, Trans. A.M.S. 203 (1975), 55-66.

9) J. Tomiyama, Flow の spectral subspace とその応用. 数理解析研究所講究録 206 (1974), 64-91.

10) ———, 関数環と flow について, 数学 28 (1976), 35-46

11). J. Wada, Function algebra と flow, 数理解析研究所講究録 232 (1975), 90-96,